Cuestión I.0.A

• Representemos en $\mathbb{R}^2$ las esferas de centro $(0,0)$ y radio 1 para las distancias de Manhattan (d_1) y de Chebyshev (d_∞).

Esquema de resolución.—

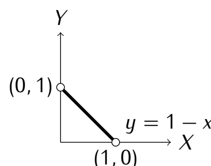
I. La distancia de Manhattan se define, $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$, por $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2|+|y_1-y_2|$; por lo tanto,

$$\begin{aligned} S_1((0,0),1) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : d_1((x,y),(0,0)) = 1\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x-0|+|y-0| = 1\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y| = 1\right\}; \end{aligned}$$

restringiendo al primer cuadrante, esto es, siendo $|x|=x$ e $|y|=y$, la esfera restringida a este cuadrante es

- $S_1((0,0),1)\big|_{x,y>0} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y>0, x+y=1\right\}$ (primer cuadrante),

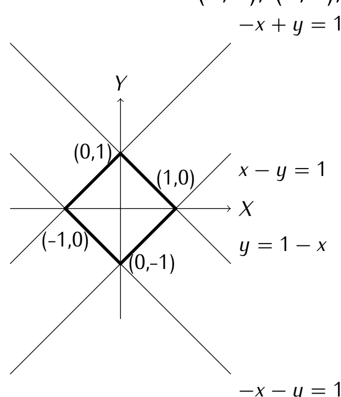
esto es, el segmento abierto (de la recta $y=1-x$) de extremos $(0,1)$ y $(1,0)$:



Las restricciones a los demás cuadrantes son los segmentos abiertos:

- $S_1((0,0),1)\big|_{\substack{x<0\\y>0}} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0, y>0, -x+y=1\right\}$ (segundo cuadrante),
- $S_1((0,0),1)\big|_{\substack{x<0\\y<0}} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0, y<0, -x-y=1\right\}$ (tercer cuadrante) y
- $S_1((0,0),1)\big|_{\substack{x>0\\y<0}} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y<0, x-y=1\right\}$ (cuarto cuadrante),

que precisamente son los términos en sucesión de las simetrías axiales entre cuadrantes $I \mapsto II \mapsto III \mapsto IV$. A estos puntos añadimos los situados en los ejes: $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$ (cuya distancia d_1 a $(0,0)$ también es 1).
En definitiva, $S_1((0,0),1)$ es el borde del rombo de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$:



II. La distancia de Chebyshev se define, $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, por $d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sup\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$; por lo tanto,

$$\begin{aligned} S_\infty((0,0),1) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : d_\infty((x,y),(0,0)) = 1\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sup\{|x-0|,|y-0|\} = 1\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \text{máx}\{|x|,|y|\} = 1\right\}, \end{aligned}$$

pues para un conjunto finito, el supremo coincide con el máximo; restringiendo al primer cuadrante, esto es, siendo

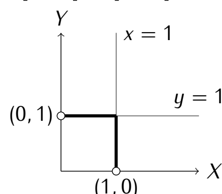
$|x| = x$ e $|y| = y$, la esfera restringida a este cuadrante es

$$S_\infty((0,0),1)\big|_{x,y>0} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, \text{máx}\,\{x,y\} = 1\Big\} \text{ (primer cuadrante);}$$

como $\text{máx}\,\{x,y\} = 1$ si, y sólo si, $x = 1$ e $y \leq 1$, o $x \leq 1$ e $y = 1$, entonces

$$\begin{aligned} S_\infty((0,0),1)\big|_{x,y>0} &= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x = 1, y \leq 1\Big\} \cup \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x \leq 1, y = 1\Big\} \\ &= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, 0 < y \leq 1\Big\} \cup \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, y = 1\Big\} \end{aligned}$$

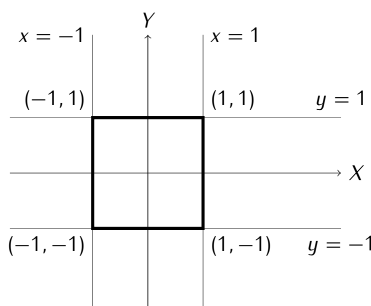
esto es, los lados derecho y superior del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$:



Ahora, por simetrías entre cuadrantes:

$$\begin{aligned} S_\infty((0,0),1) &= \text{lados derecho y superior de } [0,1] \times [0,1] \quad (1^{er} \text{ cuadrante}) \\ &\quad \cup \text{ lados izquierdo y superior de } [-1,0] \times [0,1] \quad (2^{o} \text{ cuadrante}) \\ &\quad \cup \text{ lados izquierdo e inferior de } [-1,0] \times [-1,0] \quad (3^{er} \text{ cuadrante}) \\ &\quad \cup \text{ lados derecho e inferior de } [0,1] \times [-1,0] \quad (4^{o} \text{ cuadrante}) \\ &= \text{lados de } [-1,1] \times [-1,1]. \end{aligned}$$

A estos puntos añadimos los situados en los ejes: $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$ (cuya distancia d_∞ a $(0,0)$ también es 1):



En definitiva, $S_\infty((0,0),1)$ es el borde del cuadrado de centro $(0,0)$ y lado de longitud 2. □

Cuestión I.0.B

⦿ En $(\mathbb{R}, d_2)$, hallemos razonadamente el interior, el exterior, la frontera, la frontera interior, la frontera exterior, la adherencia, el derivado y la isla del conjunto $[0, 1/4)$, esto es, del conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1/4\}$.

Esquema de resolución.— Llamemos A al conjunto dado. Hallémoslos, razonadamente.

Interior.— Sabemos que para todo conjunto C se satisface que $\mathring{C} \subseteq C$, por lo que la cuestión es para qué $x \in A$, $x \in \mathring{A}$. Por definición de interior, $x \in \mathring{A}$ si, y sólo si, $(\exists r \in \mathbb{R}^+)(B(x,r) \subseteq A)$. Si $x \in (0, 1/4)$, basta elegir $r < \text{mín}\{|x-0|, |x-1/4|\}$, por lo que $(0,1/4) \subseteq \mathring{A}$. Si $x = 0$, es imposible, pues $\forall r \in \mathbb{R}^+$, siempre hay puntos de $A^\complement$ en la bola $B(0,r)$, concretamente todos los puntos de $(-r, 0)$. Luego, $\mathring{A} = (0, 1/4)$.

Frontera.— Por definición de frontera, $x \in \delta A$ si, y sólo si, $(\forall r \in \mathbb{R}^+)(B(x,r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x,r) \cap A^\complement \neq \emptyset)$. Por el razonamiento hecho para el interior: I, si $x \in (0, 1/4)$, existen bolas sin intersección con $A^\complement$, luego tales puntos no están en δA, y II, todas las bolas de centro 0 tienen intersección con $A^\complement$ (y también con A —el propio 0, centro de las bolas—); luego $0 \in \delta A$. Igualmente, todas las bolas de centro $1/4$ tienen intersección con $A^\complement$ (ya que $1/4 \notin A$) y tienen intersección con A, concretamente, $B(1/4, r) \cap A = (\text{máx}\{1/4 - r, 0\}, 1/4)$; luego $1/4 \in \delta A$. Por otra parte, ningún $x \in (-\infty, 0)$ está en δA, pues cualquier bola de radio menor que la distancia de x a 0 no tiene intersección con A; sucede también que ningún elemento de $(1/4, \infty)$ está en δA, pues cualquier bola de radio menor que la distancia de x a $1/4$ no tiene intersección con A. En definitiva, $\delta A = \{0, 1/4\}$.

Frontera interior.— $\delta_i A = \delta A \cap A = \{0\}$.

Frontera exterior.— $\delta_e A = \delta A \cap A^{\complement} = \{1/4\}$.

Exterior.— $\text{ext}A = \mathbb{R} \setminus (\mathring{A} \cup \delta A)$, por lo que $\text{ext}A = \mathbb{R} \setminus ((0, 1/4) \cup \{0, 1/4\}) = \mathbb{R} \setminus [0, 1/4] = (-\infty, 0) \cup (1/4, \infty)$.

Adherencia.— $\overline{A} = \mathring{A} \cup \delta A$, por lo que $\overline{A} = (0, 1/4) \cup \{0, 1/4\} = [0, 1/4]$.

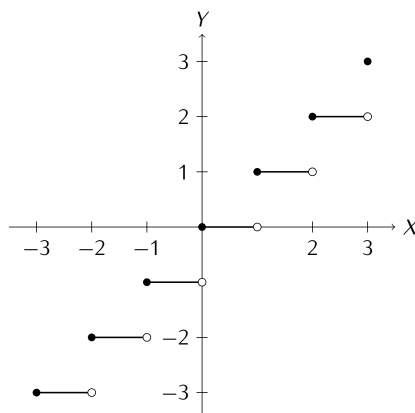
Isla.— Como $A^s \subseteq A$, nos preguntamos qué $x \in A$ están en A^s. Por definición de isla, $x \in A^s$ si, y sólo si, $(\exists r \in \mathbb{R}^+)(B(x, r) \cap A = \{x\})$. Veamos: si $x = 0$, todos los puntos de $(0, \text{mín}\{r, 1/4\})$ están en $B(x, r) \cap A$; si $x \in (0, 1/4)$, todos los puntos de $(x, x + \text{mín}\{r, |x - 1/4|\})$ están en $B(x, r) \cap A$. Luego, no existe ninguna bola de centro $x \in A$ tal que $B(x, r) \cap A = \{x\}$ y, por lo tanto, $A^s = \emptyset$.

Acumulación.— Como $\{A', A^s\}$ es una partición de $\overline{A}$, entonces $A' = \overline{A} \setminus A^s = [0, 1/4] \setminus \emptyset = [0, 1/4]$. □

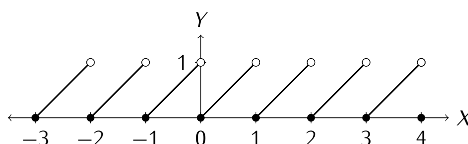
Cuestión I.1.A

● Estudiemos la continuidad de la función $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ en $\mathbb{R}$ ($\lfloor x \rfloor$ es la función suelo de x).

Esquema de resolución.— Dado $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ es el mayor número entero menor o igual que x, esto es, $\lfloor x \rfloor = n$ siendo $n \leq x < n + 1$; su representación en $[-3, 3]$ es:



La función que nos interesa es $x - \lfloor x \rfloor$, que atendiendo a la definición anterior es $x - \lfloor x \rfloor = x - n$ con $n \leq x < n + 1$, esto es, si $x \in [n, n + 1)$; su representación en $[-3, 4]$ es:



Como el polinomio $x - n$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$, lo es en cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$, en particular en todos los intervalos abiertos $(n, n + 1)$ con $n \in \mathbb{Z}$. Por esto, la función $x - \lfloor x \rfloor$ sólo es discontinua en los números enteros, presentando en cada uno de ellos una discontinuidad de salto de magnitud 1, siendo en cada uno de ellos continua por la derecha —pues $\lim\limits_{x \to n^+} (x - \lfloor x \rfloor) = \lim\limits_{\substack{x \to n \\ n \leq x}} (x - \lfloor x \rfloor) = \lim\limits_{\substack{x \to n \\ n \leq x}} (x - n) = n - n = 0$, igual a $f(n) = n - \lfloor n \rfloor = 0$— y discontinua por la izquierda —ya que $\lim\limits_{x \to n^-} (x - \lfloor x \rfloor) = \lim\limits_{\substack{x \to n \\ x \leq n}} (x - \lfloor x \rfloor) = \lim\limits_{\substack{x \to n \\ x \leq n}} (x - (n - 1)) = n - (n - 1) = 1$, que no es igual a $f(n)$—. □

Cuestión I.1.B

● Sea f la función real de variable real definida por $f(x) = -1$ si $x = 0$ y $f(x) = x$ si $0 < x < 1$; esta función es continua en $(0, 1)$ y $f(0)f(1) < 0$, pero $\nexists x \in (0, 1)$ tal que $f(x) = 0$, ¿contradice esto el teorema de Bolzano?

Esquema de resolución.— El teorema de Bolzano afirma que si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y se satisface que $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Si bien la función dada satisface que $f(0)f(1) < 0$, no así que sea f continua en $[0, 1]$. En efecto, f no es continua en $[0, 1]$ por no ser continua por la derecha en 0. Esto último es así pues $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \neq -1 = f(0)$.

Solución.— No existe contradicción alguna, lo que sucede es que el teorema de Bolzano no puede aplicarse a f en $[0,1]$, ya que f no satisface en $[0,1]$ las hipótesis de dicho teorema. □

Observación.— «Un teorema es para siempre» (Eduardo Sáenz de Cabezón) (`https://www.youtube.com/watch?v=gHJNMiSFuAM`).

Cuestión I.2.A

- Utilicemos algún teorema de valores intermedios de derivación (Peano, Cauchy, Lagrange o Rolle) para resolver la siguiente cuestión: «Un coche que circula por una autopista con límite 120 km/h pasa ante dos radares separados 9 km a las 6 h 12 m y a las 6 h 16 m, respectivamente, y ambos miden 105 km/h. ¿Ha incurrido en infracción de tráfico?»

Esquema de resolución.— Sean t_1 y t_2 los instantes de tiempo a los que pasa por el primer y el segundo radar, respectivamente, a saber. Sabemos que $t_2 - t_1 = 4$ minutos. La función espacio $s : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ definida por $t \mapsto s(t)$, que asigna a cada instante de tiempo la posición del coche en la autopista en dicho instante, es una función continua en $[t_1, t_2]$ y derivable en (t_1, t_2) (su derivada es la función velocidad). Por el teorema de Lagrange, $\exists t_0 \in (t_1, t_2)$ tal que $s'(t_0)$, esto es, la velocidad en el instante t_0, es igual a $\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$, es decir, a $\dfrac{9}{4}$ km/m $\cdot$ 60 m/h $= 135$ km/h.

Solución.— Sí ha incurrido en una infracción de tráfico, pues hay un momento en el que ha ido a 135 km/h en un tramo limitado a 120 km/h. □

Observación.— Como es lógico, pudiésemos tomar el primer radar como origen del tiempo de interés, esto es, que fuesen t_1 y t_2, 0 minutos y 4 minutos, respectivamente, definiendo entonces la función espacio s en $[0,4]$.

Cuestión I.2.B

- Demostremos que la ecuación $\operatorname{sen} x = 1 - 2x$ tiene una única solución real. (*Sugerencia*: Pudiésemos utilizar un corolario del teorema de Rolle relativo al número de raíces de una función y de su derivada, junto al teorema de Bolzano).

Cfr. ejemplo c (p. 52) de: Valderrama Bonet, Mariano José, *Modelos matemáticos en las ciencias experimentales*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Pirámide, 1995, ISBN: 84-368-0902-5.

Esquema de resolución.— Sea $f(x) = \operatorname{sen} x - 1 + 2x$. Su función derivada, $f'(x) = \cos x + 2$, carece de raíces reales (ya que $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = -2$), por lo que f tiene como mucho una raíz real [por un corolario del teorema de Rolle: si f' tiene n raíces reales, f tiene a lo sumo $n+1$ raíces reales]. Por otro lado, como f es continua en el intervalo cerrado $[0, \pi/2]$ [por ser la función suma de las funciones continuas $\operatorname{sen} x$, -1 y $2x$] y $f(0) \cdot f(\pi/2) = (-1) \cdot \pi \leq 0$, existe al menos una raíz real de f en el intervalo abierto $(0, \pi/2)$ [por el teorema de Bolzano]. Uniendo ambos hechos, que f tiene a lo sumo una raíz y que tiene una raíz en $(0, \pi/2)$, concluimos que f tiene una única raíz real y, por lo tanto, la ecuación $f(x) = 0$, esto es, $\operatorname{sen} x = 1 - 2x$, tiene una única solución real. □

Cuestión I.3.A

- Calculemos utilizando franjas verticales el área de la región acotada del plano que queda encerrada entre la recta $y = 2x - 4$ y la parábola $y^2 = 4x$.

Cfr. ejercicio 10.12 (p. 302) de: Burgos Román, Juan de, *Cálculo infinitesimal: definiciones, teoremas y resultados*, Las Rozas, Madrid (ES-MD), España: García-Maroto, 2006, edición estudiante, ISBN: 84-934785-5-5.

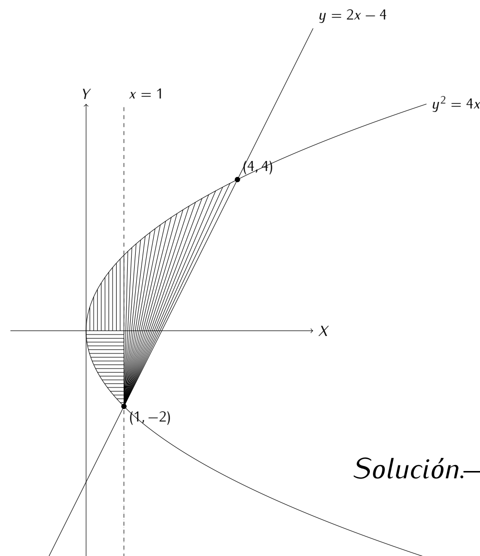
Esquema de resolución.— Calculemos los puntos de corte de la recta $y = 2x - 4$ y la parábola $y^2 = 4x$:

$$\begin{aligned}(2x-4)^2 = 4x &\Leftrightarrow 4x^2 - 16x + 16 = 4x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0,\end{aligned}$$

que tiene por soluciones $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$, por lo que los puntos de corte son $(1,-2)$ y $(4,4)$.

Por otra parte, la recta corta al eje de abcisas en $(2,0)$ y al eje de ordenadas en $(0,-4)$ y la parábola sólo corta a los ejes en $(0,0)$.

Conviene dibujar la situación para tener claro el área de interés y cómo calcularla. En la imagen podemos visualizar dicha área de interés. En el cálculo por franjas verticales del área de interés, ésta es la suma del área de la región rayada verticalmente más el área de la región rayada horizontalmente más el área de la región rayada oblicuamente. La suma de las dos primeras podría hallarse como $\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx$, con $f(x) = \sqrt{4x}$ y $g(x) = -\sqrt{4x}$, o también, independientemente, $\int_0^1 \left(\sqrt{4x} - 0\right)\,dx$ la rayada verticalmente y $\int_0^1 \left(0 - \left(-\sqrt{4x}\right)\right)\,dx$ la rayada horizontalmente. El área de la rayada oblicuamente es $\int_1^4 (f(x) - g(x))\,dx$, con $f(x) = \sqrt{4x}$ y $g(x) = 2x - 4$.



En definitiva, el área total es

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \sqrt{4x}\,dx + \int_0^1 \sqrt{4x}\,dx + \int_1^4 \left(\sqrt{4x} - (2x-4)\right)\,dx \\
&= 4\int_0^1 \sqrt{x}\,dx + 2\int_1^4 \sqrt{x}\,dx - 2\int_1^4 x\,dx + 4\int_1^4 1\,dx \\
&= 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{3/2}\Big|_{x=0}^{x=1} + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{3/2}\Big|_{x=1}^{x=4} - 2 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{x=1}^{x=4} + 4 \cdot x\Big|_{x=1}^{x=4} \\
&= 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(4^{3/2} - 1^{3/2}\right) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(4^2 - 1^2\right) + 4 \cdot (4-1) \\
&= 9
\end{aligned}
$$

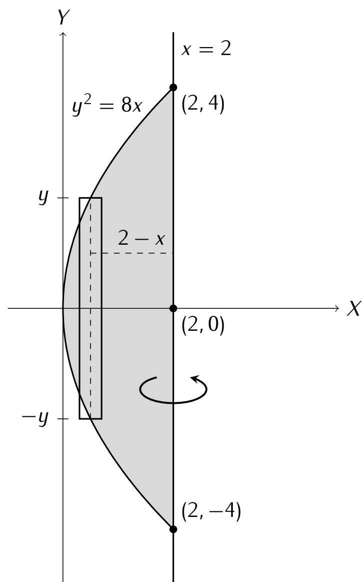
Solución.— El área buscada tiene un valor de 9 unidades de área. □

Cuestión I.3.B

• Calculemos utilizando capas verticales el volumen generado por el área plana encerrada entre la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$ al girar alrededor de dicha recta.

Cfr. problema resuelto 2 (p. 321) de: Ayres, Frank, y Mendelson, Elliot, *Cálculo diferencial e integral*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1990, 3.ª ed., ISBN: 84-7615-560-3.

Esquema de resolución.— Para su resolución por capas verticales, debemos tener en cuenta que el rectángulo aproximante es de anchura Δx y de altura $2y$, esto es, $2y = 2\sqrt{8x} = 4\sqrt{2x}$, y que su distancia media al eje de rotación es $2 - x$; es por esto que el volumen de la capa cilíndrica generada en la rotación de dicho rectángulo aproximante alrededor de la recta $x = 2$ tiene un valor de $2\pi \cdot (2 - x) \cdot (4\sqrt{2x} \cdot \Delta x)$ unidades de volumen.



Calculamos entonces el valor del volumen pedido de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 2\pi(2-x)4\sqrt{2x}\,dx \\
&= 8\sqrt{2}\pi \int_0^2 (2-x)\sqrt{x}\,dx \\
&= 16\sqrt{2}\pi \int_0^2 \sqrt{x}\,dx - 8\sqrt{2}\pi \int_0^2 x\sqrt{x}\,dx \\
&= 16\sqrt{2}\pi \frac{2}{3} \cdot x^{3/2}\Big|_{x=0}^{x=2} - 8\sqrt{2}\pi \frac{2}{5} \cdot x^{5/2}\Big|_{x=0}^{x=2} \\
&= 16\sqrt{2}\pi \frac{2}{3} \cdot 2^{3/2} - 8\sqrt{2}\pi \frac{2}{5} \cdot 2^{5/2} \\
&= \frac{256\pi}{15}.
\end{aligned}
$$

Solución.— El volumen que nos interesa tiene un valor de $\frac{256\pi}{15}$ unidades de volumen. □

Cuestión I.Op.A

■ Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[-5, 5]$. Con Sage:

a. representemos en el mismo gráfico la función f (en azul) y sus trasladadas, 3 unidades hacia arriba (en rojo), 3 unidades hacia abajo (en púrpura), 3 unidades hacia la derecha (en naranja) y 3 unidades hacia la izquierda (en verde);

b. representemos en el mismo gráfico la función f (en azul) y sus dilataciones y contracciones: dilatada/alargada verticalmente tres veces (en rojo), contraída/comprimida verticalmente tres veces (en púrpura), dilatada/alargada horizontalmente tres veces (en naranja) y contraída/comprimida horizontalmente tres veces (en verde).

Esquema de resolución.—

a.
```
plot(sin(x), (x,-5,5), color='blue') + plot(sin(x)+3, (x,-5,5), color='red') +
    plot(sin(x)-3, (x,-5,5), color='purple') + plot(sin(x-3), (x,-5+3,5+3), color
    ='orange') + plot(sin(x+3), (x,-5-3,5-3), color='green')
```

b.
```
plot(sin(x), (x,-5,5), color='blue') + plot(3*sin(x), (x,-5,5), color='red') +
    plot(1/3*sin(x), (x,-5,5), color='purple') + plot(sin(1/3*x), (x,-5,5), color
    ='orange') + plot(sin(3*x), (x,-5,5), color='green')
```
□

Cuestión I.Op.B

■ Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[-1, 1]$. Con Sage:

a. hallemos su inversa (llamémosla g);

b. representemos en el mismo gráfico ambas funciones en el intervalo $[-1, 1]$, f en azul y su inversa g en rojo.

Esquema de resolución.—

a.
```
var('x,y') # declarando las variables
assume(-1<=x<=1) # definiendo el dominio restringido de f
f(x) = sin(x) # definiendo f
g(x) = solve(x == f(y), y)[0].rhs() # definiendo la inversa de f
```

b. las representamos con razón de aspecto 1:1, para lo cual basta añadir al código anterior esta línea al final:

```
plot(f, (x,-1,1), color='blue', aspect_ratio=1) + plot(g, (x,-1,1), color='red',
     aspect_ratio=1) # representando f en azul y g en rojo, ambas en [-1,1]
```
□

Cuestión II.0.A

■ Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f(x, y) = \dfrac{x^3 \cos \dfrac{1}{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$.

Cfr. problema resuelto 1.23 (p. 24) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Esquema de resolución.—

Como no sospechamos nada sobre la no continuidad de f en algún punto (en cuyo caso pudiésemos estudiar los límites reiterados o las continuidades parciales), procedemos de la siguiente forma:

I. esta función es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ por ser un cociente de funciones continuas cuyo denominador no se anula;

II. el límite en $(0, 0)$ es indeterminado $\dfrac{0}{0}$ de dos variables; expresándolo en coordenadas polares también es indeterminado $\dfrac{0}{0}$, pero de una variable:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 \cos \frac{1}{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \overset{\substack{x=r\cos\theta \\ y=r\operatorname{sen}\theta}}{\underset{x^2+y^2=r^2}{=}} \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos^3\theta \cos \frac{1}{r^2}}{r^2} \overset{r\neq 0}{=} \lim_{r\to 0} r \cos^3\theta \cos \frac{1}{r^2} = \cos^3\theta \lim_{r\to 0} r \cos \frac{1}{r^2} \overset{-1\leq \cos\frac{1}{r^2} \leq 1}{\underset{\lim_{r\to 0} r = 0}{=}} 0;$$

III. como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \overset{\text{definición de } f}{=} f(0,0)$, la función también es continua en $(0,0)$.

Solución.— Este campo escalar es continuo en $\mathbb{R}^2$. □

Cuestión II.0.B

■ Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{23x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$.

Cfr. ejemplo b (p. 65) de: Valderrama Bonet, Mariano José, *Modelos matemáticos en las ciencias experimentales*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Pirámide, 1995, ISBN: 84-368-0902-5.

Esquema de resolución.—

Como no sospechamos nada sobre la no continuidad de f en algún punto (en cuyo caso pudiésemos estudiar los límites reiterados o las continuidades parciales), procedemos de la siguiente forma:

I. esta función es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ por ser un cociente de funciones continuas cuyo denominador no se anula;

II. el límite en $(0,0)$ es indeterminado $\dfrac{0}{0}$ de dos variables; expresándolo en coordenadas polares también es indeterminado $\dfrac{0}{0}$, pero de una variable:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{23x^2y}{x^2+y^2} \underset{x^2+y^2=r^2}{\overset{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta}}{=}} \lim_{r\to0} \frac{23r^2\cdot\cos^2\theta\cdot r\cdot\mathrm{sen}\,\theta}{r^2} \overset{r\neq0}{=} \lim_{r\to0} 23r\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta = 23\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \lim_{r\to0} r$$
$$\underset{\lim\limits_{r\to0} r=0}{=} 23\cdot\cos^2\theta\cdot\mathrm{sen}\,\theta\cdot 0 = 0;$$

III. como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \overset{\text{definición de } f}{=} f(0,0)$, la función también es continua en $(0,0)$.

Solución.— Este campo escalar es continuo en $\mathbb{R}^2$. □

Cuestión II.1.A

■ Del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$:

a. calculemos todas sus derivadas direccionales en $(0,0)$ (*sugerencia*: encontremos $D_{\vec{u}_\theta} f(0,0)$ para un vector unitario cualquiera $\vec{u}_\theta$ con $0 \leq \theta < 2\pi$), y

b. en particular, ¿cuáles son aquéllas según las direcciones de las rectas $y = x$, $y = 0$ y $x = 0$?

Cfr. ejemplo 2.1 (p. 32) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Esquema de resolución.—

a. Recordando la representación en coordenadas polares, sabemos que la familia de vectores $\{\vec{u}_\theta = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ cubre todas las direcciones posibles en el plano; estudiemos, por tanto, el valor de la derivada direccional para un vector arbitrario $\vec{u}_\theta$ de dicha familia:

$$D_{\vec{u}_\theta} f(0,0) = \lim_{t\to0} \frac{f((0,0)+t\vec{u}_\theta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0} \frac{f((0,0)+t(\cos\theta,\mathrm{sen}\,\theta)) - 0}{t}$$
$$= \lim_{t\to0} \frac{1}{t} f(t\cos\theta, t\,\mathrm{sen}\,\theta) = \lim_{t\to0} \frac{1}{t}\cdot\frac{t^2\cdot\cos^2\theta\cdot t\cdot\mathrm{sen}\,\theta}{t^2\cdot\cos^2\theta + t^2\cdot\mathrm{sen}^2\theta} = \lim_{t\to0} \frac{t^3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{t^3\left(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta\right)}$$
$$\overset{t\neq0}{=} \lim_{t\to0} \frac{\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\left(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta\right)} \overset{\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta=1}{=} \lim_{t\to0} \cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta = \cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta;$$

en otras palabras, el conjunto de todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$ es $\{D_{\vec{u}_\theta} f(0,0) = \cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta : 0 \leq \theta < 2\pi\}$.

b. I. La recta $y = x$ forma un ángulo de valor $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ radianes con el eje de abcisas, esto es, un vector unitario en la dirección de dicha recta es $\vec{u}_{\frac{\pi}{4}} = \left(\cos\dfrac{\pi}{4}, \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, de donde la derivada direccional de f en $(0,0)$ según la dirección de la recta $y = x$ es $D_{\vec{u}_{\frac{\pi}{4}}} f(0,0) = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

II. la recta $y = 0$ forma un ángulo de valor $\theta = 0$ radianes con el eje de abcisas, esto es, un vector unitario en la dirección de dicha recta es $\vec{u}_0 = (\cos 0, \operatorname{sen} 0) = (1, 0)$, de donde la derivada direccional de f en $(0,0)$ según la dirección de la recta $y = 0$ es $D_{\vec{u}_0} f(0,0) = \cos^2 0 \operatorname{sen} 0 = 1^2 \cdot 0 = 0$;

III. la recta $x = 0$ forma un ángulo de valor $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ radianes con el eje de abcisas, esto es, un vector unitario en la dirección de dicha recta es $\vec{u}_{\frac{\pi}{2}} = \left(\cos\dfrac{\pi}{2}, \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$, de donde la derivada direccional de f en $(0,0)$ según la dirección de la recta $x = 0$ es $D_{\vec{u}_{\frac{\pi}{2}}} f(0,0) = \cos^2\dfrac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 0^2 \cdot 1 = 0$. □

Cuestión II.1.B

• Del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$:

a. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $(0,0)$;
b. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
c. razonemos: ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2$?, ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?;
d. razonemos: ¿es f diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

Cfr. problema resuelto 2.11 (pp. 62–64) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Esquema de resolución.—

a. En $(0,0)$ no podemos aplicar las reglas de derivación pues al existir una indeterminación $\dfrac{0}{0}$ desconocemos si el campo es derivable en dicho punto; calculémoslas por definición:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{f(t,0) - 0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{t^2\cdot 0 + t\cdot 0^2}{t^2 + 0^2} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{0}{t^3} \overset{t\neq 0}{=} \lim_{t\to 0} 0 = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{f(0,t) - 0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{0^2\cdot t + 0\cdot t^2}{0^2 + t^2} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{0}{t^3} \overset{t\neq 0}{=} \lim_{t\to 0} 0 = 0;\end{aligned}$$

en definitiva, ambas derivadas parciales de f en $(0,0)$ valen 0;

b. para $(x,y) \neq (0,0)$, el campo es derivable por ser un cociente de funciones derivables cuyo denominador no se anula, y las derivadas parciales en este punto se obtiene por simple derivación de un cociente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{(2xy + y^2)(x^2+y^2) - 2x(x^2y + xy^2)}{(x^2+y^2)^2}; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{(x^2 + 2xy)(x^2+y^2) - 2y(x^2y + xy^2)}{(x^2+y^2)^2};\end{aligned}$$

c. un campo escalar es derivable en un punto si, y sólo si, existen todas las derivadas parciales en dicho punto; y lo es en un conjunto si, y sólo si, lo es en todos los puntos de dicho conjunto; por lo tanto, f es derivable en $\mathbb{R}^2$ —y en particular lo es también en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$— pues existen las derivadas parciales para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

d. si un campo escalar es de clase C^1 en un conjunto, entonces es diferenciable en dicho conjunto, por lo tanto: como f es derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y sus derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (por ser cocientes de funciones continuas cuyo denominador no se anula), f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por lo que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Observación.— Las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, algo simplificadas, son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x^3y + 2xy^3 + x^2y^2 + y^4 - 2x^3y - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2y^2 + 2xy^3 + y^4}{(x^2+y^2)^2};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4 + x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 - 2x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + 2x^3y - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Cuestión II.2.A

- Descompongamos 15 en tres sumandos positivos de forma que su producto sea el máximo posible; formalicémosla como una situación de optimización con restricciones de igualdad y resolvámosla por sustitución directa:
  a. definamos la condición/restricción y la función objetivo f que representan esta situación;
  b. hallemos los puntos críticos de f;
  c. discutamos utilizando la matriz hessiana de f cuál es la descomposición buscada.

Cfr. problema resuelto 5.7 (pp. 138–139) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Esquema de resolución.—

a. Siendo x, y, z los sumandos, la condición es $x+y+z=15$ y la función objetivo, en principio, es $f(x,y,z)=xyz$; utilizaremos la sustitución directa para maximizar el campo escalar $f(x,y)=xy$ sujeto a dicha condición/restricción; de la condición, $z=15-x-y$, por lo que la función objetivo es $f(x,y)=xy(15-x-y)=15xy-x^2y-xy^2$;

b. un punto crítico de un campo escalar es aquél para el que el gradiente del campo se anula o no existe; el gradiente de f es $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(15y-2xy-y^2, 15x-x^2-2xy\right) = (y(15-2x-y), x(15-x-2y))$; $\nabla f(x,y)=(0,0)$ se satisface si, y sólo si, $y(15-2x-y)=0$ y $x(15-x-2y)=0$, esto es, si $y=0$ o $15-2x-y=0$ y si $x=0$ o $15-x-2y=0$, en definitiva, precisamente: I, si $y=0$ y $x=0$, o II, si $y=0$ y $15-x-2y=0$, o III, si $15-2x-y=0$ y $x=0$, o IV, si $15-2x-y=0$ y $15-x-2y=0$; resolviendo estos cuatro sistemas obtenemos los únicos puntos críticos de f, a saber, $(0,0)$ [de I], $(15,0)$ [de II], $(0,15)$ [de III] y $(5,5)$ [de IV];

c. las derivadas parciales de segundo orden de f son $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2y$, $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(x,y) = 15-2x-2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2x$; la matriz hessiana es, por lo tanto, $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 15-2x-2y \\ 15-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$; como el enunciado afirma que son sumandos positivos, descartamos como soluciones $(x,y)=(0,0)$, $(x,y)=(15,0)$ y $(x,y)=(0,15)$; el determinante hessiano en el punto crítico $(5,5)$ es $\left|Hf(5,5)\right| = \begin{vmatrix} -10 & -5 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} = 75 > 0$; como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(5,5) = -10 < 0$, f presenta un máximo local estricto —condicionado por la ecuación $x+y+z=15$—, en otras palabras, el máximo producto posible de los tres sumandos se obtiene siendo éstos $x=5$, $y=5$ y $z=15-5-5=5$. □

Observación.— Los otros tres puntos críticos son puntos de silla; en efecto, los determinantes hessianos en ellos son negativos: $\left|Hf(0,0)\right| = \begin{vmatrix} 0 & 15 \\ 15 & 0 \end{vmatrix} = -15^2 < 0$, $\left|Hf(15,0)\right| = \begin{vmatrix} 0 & 15 \\ 15 & -30 \end{vmatrix} = -15^2 < 0$, $\left|Hf(0,15)\right| = \begin{vmatrix} -30 & 15 \\ 15 & 0 \end{vmatrix} = -15^2 < 0$.

Cuestión II.2.B

- Calculemos el valor mínimo del paraboloide $f(x,y)=x^2+y^2$ con la condición $2x-4y+5=0$; formalicémosla como una situación de optimización con restricciones de igualdad y resolvámosla por el método de los multiplicadores de Lagrange:
  a. definamos la condición/restricción g y la función objetivo f que representan esta situación;
  b. hallemos los puntos críticos de la lagrangiana y los puntos donde f pudiese alcanzar un extremo local;
  c. verifiquemos que se satisface la condición de regularidad;
  d. discutamos utilizando la matriz hessiana orlada de la lagrangiana cuáles debiesen ser las longitudes buscadas.

Cfr. ejemplo a (p. 88) de: Valderrama Bonet, Mariano José, *Modelos matemáticos en las ciencias experimentales*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Pirámide, 1995, ISBN: 84-368-0902-5.

Esquema de resolución.—

a. Podemos leer en el enunciado que la condición/restricción es $2x - 4y + 5 = 0$ y que la función objetivo es $f(x, y) = x^2 + y^2$; utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange para minimizar el campo escalar $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeto a la condición/restricción $g(x, y) = 2x - 4y + 5$;

b. la función lagrangiana es $\Lambda(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$, esto es, $\Lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(2x - 4y + 5)$; un punto crítico de un campo escalar es aquél para el que el gradiente del campo se anula o no existe; el gradiente de Λ es $\nabla\Lambda(x, y, \lambda) = \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x}(x, y, \lambda), \frac{\partial\Lambda}{\partial y}(x, y, \lambda), \frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}(x, y, \lambda)\right) = (2x - 2\lambda, 2y + 4\lambda, -2x + 4y - 5)$; $\nabla\Lambda(x, y, \lambda)$ no presenta problemas de existencia en $\mathbb{R}^3$; de $\nabla\Lambda(x, y, \lambda) = (0, 0, 0)$, de $2x - 2\lambda = 0$ y $2y + 4\lambda = 0$, tenemos $x = \lambda$ e $y = -2\lambda$, que sustituyendo en $-2x + 4y - 5 = 0$, obtenemos $-2\lambda - 8\lambda - 5 = 0$, de donde $\lambda = \frac{-1}{2}$, por lo tanto, $x = \frac{-1}{2}$ e $y = -2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) = 1$, por lo que el único punto crítico de la lagrangiana es $\left(\frac{-1}{2}, 1, \frac{-1}{2}\right)$, de donde, el único punto donde f pudiese alcanzar un extremo local es $\left(\frac{-1}{2}, 1\right)$;

c. $\nabla g(x, y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right) = (2, -4)$ por lo que $\nabla g\left(\frac{-1}{2}, 1\right) = (2, -4) \neq (0,0)$, por lo que se satisface la condición de regularidad;

d. la matriz hessiana de la lagrangiana es $H_{(x,y)}\Lambda(x, y, \lambda) = Hf(x, y) - \lambda Hg(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, por lo que la matriz hessiana orlada de la lagrangiana en su punto crítico $\left(\frac{-1}{2}, 1, \frac{-1}{2}\right)$ es
$H\Lambda\left(\frac{-1}{2}, 1, \frac{-1}{2}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \nabla g(-1/2, 1) \\ \hline \nabla g(-1/2, 1)^t & H_{(-1/2,1)}\Lambda(-1/2, 1, -1/2) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; para averiguar el tipo de extremo local, precisamos analizar los menores principales M_k con $k = 2m + 1, \ldots, m + n$, con n el n.º de variables y m el n.º de condiciones/restricciones; como en la situación de estudio $n = 2$ y $m = 1$, sólo necesitamos calcular el único menor principal de orden 3, $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -40$, que resulta ser negativo, por lo que f alcanza en e$\left(\frac{-1}{2}, 1\right)$ un mínimo local estricto —condicionado por la ecuación $2x - 4y + 5 = 0$—, en otras palabras, el área mínima se obtiene siendo las dimensiones $x = \frac{-1}{2}$ e $y = 1$.

□

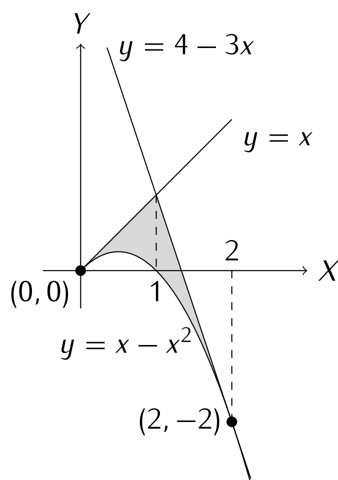
Cuestión II.3.A

• Calculemos por integración doble el volumen de la región tridimensional debajo de la superficie $z = xe^{y-x}$ sobre el conjunto del plano $z = 0$ encerrado entre la parábola $y = x - x^2$ y las tangentes a ella en los puntos $(0, 0)$ y $(2, -2)$ (esto es, las rectas $y = x$ e $y = 4 - 3x$, respectivamente).

Cfr. ejercicio 11.12 (p. 341) de: Burgos Román, Juan de, *Cálculo infinitesimal: definiciones, teoremas y resultados*, Las Rozas, Madrid (ES-MD), España: García-Maroto, 2006, edición estudiante, ISBN: 84-934785-5-5.

Esquema de resolución.— En la figura hemos representado el recinto de integración, esto es, el conjunto del plano $z = 0$ encerrado entre la parábola $y = x - x^2$ y las rectas $y = x$ e $y = 4 - 3x$. Dichas parábola y rectas son funciones continuas por lo que este recinto, llamémoslo D, limitado por una unión de grafos de tres funciones continuas, podemos descomponerlo en una unión finita de recintos de tipo 1 y de tipo 2; en este caso, lo descomponemos en una unión de dos recintos de tipo 1, según x sea menor o igual que 1 o mayor o igual que 1.

Observamos, entonces, que en dicho plano, cuando x varía desde 0 hasta 1, y varía desde la parábola $y = x - x^2$ hasta la recta $y = x$, y cuando x varía desde 1 hasta 2, y varía desde la parábola $y = x - x^2$ hasta la recta $y = 4 - 3x$.



Por esto, calculamos el valor del volumen de interés de la siguiente manera:

$$V = \iint_D xe^{y-x}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x-x^2}^{x} xe^{-x}e^{y}\,dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{x-x^2}^{4-3x} xe^{-x}e^{y}\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(xe^{-x}e^{y} \Big|_{y=x-x^2}^{y=x} \right) dx + \int_1^2 \left(xe^{-x}e^{y} \Big|_{y=x-x^2}^{y=4-3x} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(xe^{-x}e^{x} - xe^{-x}e^{x-x^2} \right) dx + \int_1^2 \left(xe^{-x}e^{4-3x} - xe^{-x}e^{x-x^2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(xe^{0} - xe^{-x^2} \right) dx + \int_1^2 \left(xe^{4-4x} - xe^{-x^2} \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}e^{-x^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} + \left(-\frac{1}{4}xe^{4-4x} - \frac{1}{16}e^{4-4x} + \frac{1}{2}e^{-x^2} \right) \Big|_{x=1}^{x=2}$$

$$= \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-1} \right) - \left(0 + \frac{1}{2} \right) \right) + \left(\left(-\frac{1}{2}e^{-4} - \frac{1}{16}e^{-4} + \frac{1}{2}e^{-4} \right) - \left(-\frac{1}{4}e^{0} - \frac{1}{16}e^{0} + \frac{1}{2}e^{-1} \right) \right)$$

$$= \frac{-e^{-4}+5}{16}.$$

Solución.— El volumen que nos interesa tiene un valor de $\frac{-e^{-4}+5}{16}$ unidades de volumen. □

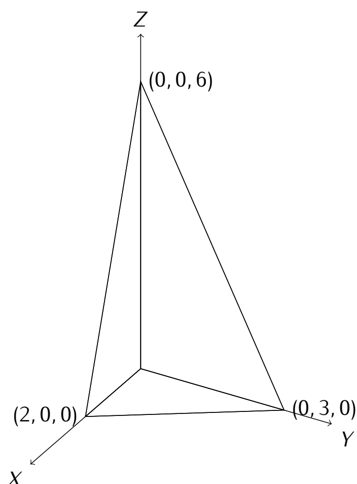
Cuestión II.3.B

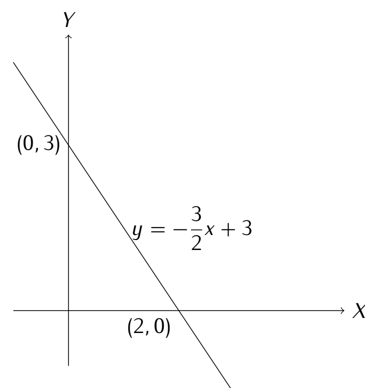
• Calculemos por integración triple el volumen de la región $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 3x + 2y + z \leq 6\}$.

Cfr. problema resuelto 8.1 (pp. 216–217) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Esquema de resolución.— En la primera figura hemos representado la región tridimensional. En la segunda figura hemos representado el recinto de integración, esto es, el conjunto del plano $z = 0$ encerrado entre los ejes y la recta $y = -\frac{3}{2}x + 3$. Es un recinto de tipo 1, llamémoslo D.

Observamos, entonces, que en dicho plano, cuando x varía desde 0 hasta 2, y varía desde la parábola $y = 0$ hasta la recta $y = -\frac{3}{2}x + 3$, y cuando $(x, 0)$ varía hasta $\left(x, y = -\frac{3}{2}x + 3\right)$, z varía desde $z = 0$ hasta el plano $z = -3x - 2y + 6$.





Es por esto que calculamos el valor del volumen de interés de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 \int_0^{-3x/2+3} \int_0^{6-3x-2y} 1\,dz\,dy\,dx = \int_0^2 \left(\int_0^{-3x/2+3} z\Big|_{z=0}^{z=6-3x-2y} dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{-3x/2+3} (6-3x-2y)\,dy \right) dx = \int_0^2 (6y-3xy-y^2)\Big|_{y=0}^{y=-3x/2+3} dx \\ &= \int_0^2 \left(6\left(-\frac{3}{2}x+3\right) - 3x\left(-\frac{3}{2}x+3\right) - \left(-\frac{3}{2}x+3\right)^2 \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{9}{4}x^2 - 9x + 9 \right) dx \\ &= \left(\frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x \right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} = \frac{3}{4}\cdot 6^3 - \frac{9}{2}\cdot 6^2 + 9\cdot 6 = 6. \end{aligned}$$

Solución.— El volumen que nos interesa tiene un valor de 6 unidades de volumen. □

Cuestión II.Op.A

▪ Del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{x^2-2y^2}{2x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$:

a. estudiemos los límites reiterados en $(0,0)$, y
b. estudiemos el límite en $(0,0)$.

Cfr. ejemplo 1.10 (p. 8) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Esquema de resolución.—

a. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2-2y^2}{2x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-2\cdot 0^2}{2x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} \overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;
$\displaystyle \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2y^2}{2x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0^2-2y^2}{2\cdot 0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-2y^2}{y^2} \overset{y\neq 0}{=} \lim_{y\to 0}(-2) = -2$;

b. como los límites reiterados de f en $(0,0)$ existen y no coinciden, no existe el límite de f en $(0,0)$. □

Cuestión II.Op.B

▪ Del campo escalar $f(x,y) = x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{y}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$:

a. estudiemos los límites reiterados en $(0,0)$, y
b. estudiemos el límite en $(0,0)$.

Cfr. ejemplo 1.12 (p. 9) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Esquema de resolución.—

a. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{y}$ no existe porque $\displaystyle \lim_{y\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{y}$ no existe;
$\displaystyle \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{y} = \lim_{y\to 0} 0^2 \operatorname{sen}\frac{1}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$;

b. que alguno de los límites reiterados en un punto no exista no implica que la función no tenga límite en dicho punto, de hecho, esta función sí tiene límite en $(0,0)$; en efecto, se satisface

$$-x^2 = x^2\cdot 1 \leq -x^2\left|\operatorname{sen}\frac{1}{y}\right| \leq x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{y} \leq x^2\left|\operatorname{sen}\frac{1}{y}\right| \leq x^2\cdot 1 = x^2,$$

esto es, $-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{y} \leq x^2$, donde, tomando límites, $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)}(-x^2) \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{y} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2$, esto es, $\displaystyle 0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{y} \leq 0$, de donde por el teorema del emparedado, $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{y} = 0$.

Observación.— Un camino alternativo para calcular este límite es utilizando la definición de límite de una función en un punto; en efecto, demostremos por definición que dicho límite es 0 (puesto que uno de los límites reiterados es 0): $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{y} = 0$ si, y sólo si, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que si $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, entonces $\left|x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{y}\right| < \epsilon$; ahora bien, si $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, entonces $\sqrt{x^2} < \delta$ (ya que $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$), de donde $x^2 < \delta^2$ y, por lo tanto, $\left|x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{y}\right| \leq \left|x^2\right| \cdot 1 = x^2 < \delta^2$, por lo que basta elegir $\delta = \sqrt{\epsilon}$.

Para saber más

Ayres, Frank, y Mendelson, Elliot, *Cálculo diferencial e integral*, Aravaca, Madrid (ES-MD), España: McGraw-Hill, 1990, 3.ª ed., ISBN: 84-7615-560-3.

Burgos Román, Juan de, *Cálculo infinitesimal: definiciones, teoremas y resultados*, Las Rozas, Madrid (ES-MD), España: García-Maroto, 2006, edición estudiante, ISBN: 84-934785-5-5.

Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Valderrama Bonet, Mariano José, *Modelos matemáticos en las ciencias experimentales*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Pirámide, 1995, ISBN: 84-368-0902-5.

Es muy recomendable el estudio de estos textos para el aprendizaje de la teoría y práctica del cálculo diferencial e integral de una y varias variables.